

Notion d'espaces vectoriels

Florent Capelli

14/09/2026

1 Espaces vectoriels

Définition 1.1. Un scalaire est un élément d'un corps. Dans ce cours, seulement $\mathbb{R}$ (mais on pourrait travailler avec $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ (corps fini à p éléments)).

Définition 1.2. Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(V, \cdot, +, \vec{0})$ est un ensemble V muni d'une loi d'addition $+: V \times V \rightarrow V$ d'une multiplication $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ vérifiant :

- $1 \cdot v = v, 0 \cdot v = 0$
- $\lambda \cdot (\beta \cdot v) = (\lambda \times \beta) \cdot v$
- $\lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v$
- $(\lambda + \beta) \cdot v = \lambda \cdot v + \beta \cdot v$
- $v + (-1) \cdot v = \vec{0}$ (cela est impliqué par $0 \cdot v = 0$ car $v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0$).
- $u + v = v + u$
- $u + (v + w) = (u + v) + w$

Les éléments de V sont appelés des *vecteurs*. Lorsque cela est clair, on notera λv au lieu de $\lambda \cdot v$, 0 au lieu de $\vec{0}$ et $-v$ au lieu de $(-1)v$.

Voici des exemples d'espaces vectoriels :

- Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}[x]$. On peut les additionner et les multiplier par un scalaire (en multipliant chaque coefficient par le scalaire). On vérifie facilement les propriétés listées ci-dessus.
- Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré au plus n , noté $\mathbb{R}_n[x]$.
- $\mathbb{R}^n$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ et $\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)$.
- Les fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (avec l'addition et la multiplication par un scalaire définie comme d'habitude sur les fonctions).
- Les carrés magiques (la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale vaut la même valeur), avec une addition case par case.

Voici des exemples d'espaces qui ne sont pas des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

- $\mathbb{Z}^n$: en effet, on n'a pas de multiplication par un scalaire naturelle, $(1/2)(1, 1, 1)$ n'est pas dans $\mathbb{Z}^3$.
- $\mathbb{R}_+^n$: en effet, on n'a pas de multiplication par un scalaire naturelle car on ne peut pas multiplier par -1 .

2 Bases et Dimension

Ici, on fixe un espace vectoriel V .

Définition 2.1. *Étant donné des vecteurs $v_1, \dots, v_n \in V$, une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$ est un vecteur obtenu comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$.*

Étant donné une famille $S \subseteq V$ de vecteurs, on appelle l'espace vectoriel engendré par S , dénoté par $\text{vec}(S)$, l'ensemble des vecteurs que l'on peut obtenir comme une combinaison linéaire finie de vecteur de S .

Exercice 2.1. *Prouvez que $\text{vec}(S)$ est un espace vectoriel.*

Exemple 2.1. *Si $V = \mathbb{R}[x]$ et $S = \{x, x+x^2, 2\}$, on peut voir que $\text{vec}(S) = \mathbb{R}_2[x]$. En effet, on a : $x^2 = 1 \cdot (x^2+x) + (-1) \cdot x$ et $1 = (1/2) \cdot 2$. Donc pour tout polynôme $P(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, on a $P(x) = (\alpha/2) \cdot 2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot (1 \cdot (x^2+x) + (-1) \cdot x) = (\alpha/2) \cdot 2 + (\beta - \gamma) \cdot x + \gamma \cdot (x^2+x)$. On a donc écrit n'importe quel polynôme de degré deux comme une combinaison linéaire de vecteurs de S . Aussi, un polynôme qui a un degré plus grand que 2 ne pourra jamais être écrit avec S puisque tous les polynômes de S sont de degré inférieur à 2.*

Exemple 2.2. *Pour $S = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2)\}$, on a $\text{vec}(S) = \mathbb{R}^2$ car $(\alpha, \beta) = \alpha(1, 1) + (\beta - \alpha)(0, 1)$. On voit cependant qu'on n'a pas besoin de $(1, 2)$. Cela motive la définition suivante.*

Définition 2.2. *Une famille S de vecteurs est libre si et seulement aucun vecteur de S n'est une combinaison linéaire des autres. Autrement dit, pour tout $v \in S$, $v \notin \text{vec}(S \setminus \{v\})$. Autrement, on dit que S est liée. Autrement dit, S est lié s'il existe $v \in S$; $w_1, \dots, w_k \in S \setminus \{v\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i$.*

Dans les exemples précédents, la famille de l'exemple 2.2 est liée alors que la famille de l'exemple 2.1 est libre.

Définition 2.3. *On dit qu'une famille S est une base de V si $\text{vec}(S) = V$ (on dit que S génère V) et que S est libre.*

Dans ce cours, on va essentiellement s'intéresser aux bases finies. Un espace vectoriel qui a une base finie est dit *de dimension finie*. On peut représenter tous ses vecteurs avec un nombre fini d'information : les différents coefficients à appliquer aux éléments de la base pour retrouver le vecteur. La notion de

dimension est centrale en algèbre linéaire par le théorème suivant connu sous le nom de théorème de la dimension :

Théorème 2.4. *Si V est de dimension finie, alors toutes les bases de V ont le même nombre de vecteurs. On notera ce nombre $\dim(V)$.*

On pourra trouver la preuve de ce théorème dans de nombreux livres concernant l'algèbre linéaire. Ce qui nous intéresse ici sont plutôt les conséquences de ce théorème. La première chose que l'on souhaite comprendre est la notion de coordonnées. On a cependant :

Lemme 2.5. *Étant donné une base $B = (b_1, \dots, b_n)$ d'un espace vectoriel V , pour tout vecteur v de V , il existe **une unique façon** d'écrire v sous la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ pour $\alpha_i \in \mathbb{R}$. On appelle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de v dans la base B .*

On peut facilement prouver ce fait. Supposons que $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$ et que $\alpha_j \neq \beta_j$ pour un certain j . Alors on peut réécrire l'égalité précédente comme : $(\alpha_j - \beta_j)b_j = \sum_{i \neq j} (\alpha_i - \beta_i)b_i$. En divisant par $\alpha_j - \beta_j$, on obtient $b_j = (\alpha_j - \beta_j)^{-1} \sum_{i \neq j} (\alpha_i - \beta_i)b_i$ ce qui contredit le fait que B soit libre. On a donc forcément $\alpha_j = \beta_j$ pour tout j .

Cela nous dit globalement que tout espace vectoriel de dimension n se comporte essentiellement comme $\mathbb{R}^n$. Ainsi, une fois qu'on a établi qu'un espace vectoriel est de dimension finie, on peut l'identifier à $\mathbb{R}^n$. À partir de maintenant, on représentera seulement les vecteurs par leurs coordonnées, en supposant implicitement la donnée d'une base.

3 Applications linéaires et matrices

Définition 3.1. *Soit V et W deux espaces vectoriels. Une application $f: V \rightarrow W$ est dite linéaire si pour tout $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.*

En particulier, en prenant $v = 0$ dans la définition ci-dessus, on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$. En prenant $\lambda = 1$, on trouve $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

Exemple 3.1. *La fonction $(x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ est linéaire. Cependant, la fonction $g: (x, y) \mapsto 2x + 3y + 2$ n'est pas linéaire. En effet $g(1, 1) = 7$ et $g(2, 2) = 12 \neq 2 \times g(1, 1)$.*

On peut voir facilement que si f est linéaire, $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i)$. Maintenant, si V est de dimension finie et que $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ est une base de V , alors f est complètement déterminée par $w_1 = f(b_1), \dots, w_n = f(b_n)$ où $w_i \in W$. En effet, comme vu précédemment, tout vecteur de V s'écrit de façon unique comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ et donc $f(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ par linéarité.

La suite au prochain épisode.