

Déterminants et équations linéaires

Florent Capelli

21/09/2026

1 Déterminant

On a vu la semaine dernière qu'il était possible de décider si une matrice est inversible avec le pivot de Gauss. On va voir ici un outil qui permet aussi de tester cela mais qui a aussi d'autres propriétés algébriques et analytiques intéressantes : le déterminant. Le déterminant $\det(v_1, \dots, v_n)$ peut être vu comme une fonction qui associe n vecteur de $\mathbb{R}^n$ à une valeur de $\mathbb{R}$. Le déterminant $\det(M)$ d'une matrice M **carrée** est alors le déterminant de ses colonnes vues comme des vecteurs.

La propriété la plus importante du déterminant est la suivante :

Théorème 1.1. *Une famille de vecteur $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ est libre si et seulement si $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. De façon équivalente, une matrice M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.*

Le déterminant a d'autre propriétés intéressantes :

- Il est multilinéaire :

$$\det(v_1, \dots, \lambda v_i + w_i, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, w_i, \dots, v_n)$$

- En particulier, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.
- Il est antisymétrique :

$$\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Cela implique au passage que si $v_i = v_j$ pour $i \neq j$, alors $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$.

- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- Si M est une matrice triangulaire avec une diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors $\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Ces propriétés nous donne un algorithme pour calculer le déterminant en utilisant le pivot de Gauss. Il suffit en effet de mettre la matrice sous forme triangulaire T telle que $T = AM$ pour des matrices $A_1, \dots, A_k$ qui correspond aux transformations du pivot. On a alors $\det(M) = \det(A_1) \dots \det(A_k) \det(T)$. On

calcule $\det(T)$ en faisant le produit de sa diagonale. Il suffit donc de connaître les déterminants de chaque opérations du pivot de Gauss :

- L'échange de deux colonnes ou lignes correspond à une multiplication du déterminant par -1 .
- La multiplication d'une colonne ou d'une ligne par λ correspond à une multiplication du déterminant par λ .
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne change pas le déterminant.

Exemple 1.1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

On trouve $\det(M) = -30$.

On peut exprimer le déterminant sous une forme mathématique closes mais peut intéressante car elle a un nombre exponentiel de terme:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n M[i, \sigma(i)]$$

où $\mathfrak{S}(n)$ est l'ensemble des permutations du $[n]$ (les bijections de $[n]$ dans $[n]$) et $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ (un nombre qui vaut 1 ou -1 en fonction du nombre d'échange de valeurs qu'il faut faire pour passer de l'identité à σ).

Si cette formula n'est pas intéressante en générale, elle permet de dériver des expressions simples dans les cas $n = 2$ et $n = 3$:

Théorème 1.2. On a :

- $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$
- $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbh - ceg - fha - idb.$

Comme nous le verrons plus tard, le déterminant a de nombreuses applications en algèbre linéaire. Il existe des interprétations du déterminant en terme géométrique : en dimension 3, c'est le volume du parallépipède engendré par trois vecteurs linéairement indépendants. En dimension 2, la surface du parallélogramme.

2 Système d'équations linéaires

Une équation linéaire sur les variables $x_1, \dots, x_n$ est une équation de la forme $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ pour $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Un système d'équation linéaire est une liste $E_1, \dots, E_m$ d'équation linéaire. En voyant $x_1, \dots, x_n$ comme un vecteur colonne, on peut écrire le système d'équation linéaire de façon matricielle :

$$AX = B$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, la ligne i de A et de B correspondent à l'équation E_i . Plus exactement, si E_i est l'équation $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i$ alors la i ème ligne de A est $a_{i,1} \dots a_{i,n}$ et la i ème ligne de B est b_i .

Lorsque A est carrée (autant d'équation que de variables) et inversible, on voit facilement que le système a une unique solution: $X = A^{-1}B$. Nous allons nous intéresser à la résolution de ce problème dans les cas plus complexes où A n'est pas inversible (voire même, pas carré). La première chose qu'il faut remarquer est que si une solution X_0 existe alors l'ensemble total des solutions est $S = X_0 + \text{Ker}(A)$, c'est-à-dire $S = \{X_0 + v \mid v \in \text{Ker}(A)\}$. Il est clair que tout élément de S est une solution: $A(X_0 + v) = AX_0 + Av = B$ puisque $Av = 0$ et $AX_0 = B$. De plus, considérons une solution X_1 telle que $AX_1 = B$. Alors $A(X_1 - X_0) = AX_1 - AX_0 = B - B = 0$. Donc $X_1 - X_0 \in \text{Ker}(A)$ donc $X_1 = X_0 + (X_1 - X_0) \in X_0 + \text{Ker}(A)$.

Donc pour trouver toutes les solutions de $AX = B$, il suffit de trouver une solution particulière et de calculer une base de $\text{Ker}(A)$. Pour trouver une solution particulière, il suffit alors d'utiliser le pivot de Gauss pour mettre A sous forme triangulaire (on appliquera les mêmes opérations sur B) et de résoudre les équations de proche en proche.

Exemple 2.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

En pratique, le pivot de Gauss est trop lent pour résoudre des systèmes à plusieurs millions de variables (question laissée en exercice : quelle est sa complexité ?). Des algorithmes basés sur les méthodes numériques approchées sont plus rapides et utilisés en pratique, voir par exemple [la méthode de Gauss-Seidel](#).

3 Valeurs et vecteurs propres

Étant donné une matrice M de dimensions $n \times n$, un *vecteur propre* de M est un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $MX = \lambda X$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un réel non nul. On dit dans ce cas que λ est une *valeur propre* de M .

Exemple 3.1. Considérons $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. X est donc un vecteur propre et 2 une valeur propre de A .

Les vecteurs propres d'une matrice sont intéressants parce qu'ils permettent de décrire M dans une base où elle est très simple. En effet, on peut facilement prouver le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Si $v_1, \dots, v_k$ sont des vecteurs propres de M associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distinctes, alors $V_1, \dots, V_k$ est une famille libre.*

Démonstration. Il est très simple de prouver ce théorème. Supposons que $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$. On suppose que l'ensemble des α_i non nul est minimal et supposons (quitte à réordonner) que $\alpha_1 \neq 0$. Alors $(M - \lambda_1 I_n)w = 0 = \sum_{i=2}^k \alpha_i \lambda_i v_i$ ce qui contredit la minimalité !

□

Étant donné une valeur propre λ de M , on note $E_M(\lambda)$ l'ensemble des vecteurs propres de M associés à λ . On peut voir que $E_M(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel. On peut aussi adapter la preuve précédente pour voir que tout élément de $E_M(\lambda_1) + \dots + E_M(\lambda_k)$ a une unique façon de s'écrire comme $v_1 + \dots + v_k$ avec $v_i \in E_M(\lambda_i)$.

Le déterminant est crucial pour trouver les valeurs et vecteurs propres d'une matrice. Si X est un vecteur propre de M avec une valeur propre λ , alors $M - \lambda I_n$ ne peut pas être inversible puisque $X \in \text{Ker}(M - \lambda I_n)$. On a alors $\det(M - \lambda I_n) = 0$. Réciproquement, si $\det(M - \lambda I_n) = 0$ alors $\text{Ker}(M - \lambda I_n)$ contient un vecteur non nul X et on a donc $MX - \lambda X = 0$ soit $MX = \lambda X$. Il n'est pas difficile de voir que $\det(M - \lambda I_n)$ est un polynôme en λ (par exemple en appliquant la formule du déterminant ou simplement en remarquant que les opérations du pivot de Gauss ne généreront que des polynômes en λ).

Définition 3.2. *Étant donnée une matrice carrée M , le polynôme caractéristique de M , dénoté χ_M , est le polynôme $\lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n)$.*

La discussion précédente nous montre que :

Théorème 3.3. *λ est une valeur propre de M si et seulement si $\chi_M(\lambda) = 0$.*

Exemple 3.2. Reprenons $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 5) \end{aligned}$$

On a donc deux valeurs propres : 2 et 5. On a déjà trouvé un vecteur propre pour 2 dans l'exemple précédent. Pour trouver un vecteur propre pour la valeur 5, on résout le système linéaire suivant : $AX = 5X$. Soit : $-x_1 + 2x_2 = 0$ et

$x_1 - 2x_2 = 0$, ce qui est équivalent à $x_1 = 2x_2$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre pour la valeur 5.

Supposons désormais que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de M et que $V = E_M(\lambda_1) + \dots + E_M(\lambda_k)$, c'est-à-dire que tout vecteur de V peut se décomposer comme une somme de vecteurs propres (ce qui arrive naturellement lorsque $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont distincts et que $k = \dim(V)$). Alors, si on écrit M dans la base $B_1 \cup \dots \cup B_k$ où B_i est une base de $E_M(\lambda_i)$. On peut voir que dans cette base, M a des valeurs nulles partout en dehors de la diagonale (on dit que M est une matrice diagonale). Sa diagonale est de la forme $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ où λ_i est répété autant de fois que $\dim(E_M(\lambda_i))$. Il est facile de voir que la réciproque est aussi vraie : s'il existe une base où M est diagonale, alors $V = E_M(\lambda_1) + \dots + E_M(\lambda_k)$.

Le fait de trouver une base où M est diagonale s'appelle *diagonaliser* M . C'est une forme normale très simple mais qui n'existe pas toujours.

Exemple 3.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. En effet son polynôme caractéristique est $(1 - \lambda)^2$. Sa seule valeur propre est donc 1. Or, si on résout le système $AX = X$, on trouve $x_1 + 2x_2 = x_1$ et $x_2 = x_2$, soit $x_2 = 0$. Donc $E_A(\lambda) = \text{vec} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui a dimension 1. On ne peut donc pas diagonaliser A .

De même, on peut s'intéresser à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 1$. Il est intéressant de voir que ce polynôme a deux solutions dans $\mathbb{C}$: i et $-i$ donc techniquement, A' est diagonalisable mais dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'on se place non plus dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ mais dans $\mathbb{C}^n$. De nombreux résultats d'algèbre linéaire utilisent cela mais nous nous concentrons ici sur les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

On peut voir que I_n a une seule valeur propre 1. Comme elle est diagonale, on sait que $\dim(E_{I_n}(1)) = n$. De plus $\chi_{I_n}(\lambda) = (1 - \lambda)^n$. On voit apparaître ici un phénomène intéressant : 1 est une racine de χ_{I_n} avec une multiplicité de n . On peut montrer en général que si λ a une multiplicité de k dans χ_M , alors $\dim(E_M(\lambda)) \leq k$.

Il existe des matrices qui sont toujours diagonalisables : les matrices symétriques positives. On dit qu'une matrice M est symétrique si $M = M^T$ (c'est-à-dire $M[i, j] = M[j, i]$).

Théorème 3.4. Toute matrice (réelle) symétrique est diagonalisable.

En particulier, ce théorème nous dit que pour toute matrice réelle carrée M , la matrice MM^T est diagonalisable. On verra que cette décomposition permet de compresser de l'information en machine learning.